ni que l'avortement s'en soit suivi. Il n'est pas même nécessaire de prouver que la victime ait été enceinte, ni que le corps dont l'avortement est tenté soit un fœtus ou un enfant. Cela peut être une masse sanguine, une môle ou un groupe d'hydatides. Il y a tout lieu de croire que le crime est fréquent, mais que son accomplissement est secret. Des demandes de drogues sont souvent faites dans ce but auprès des médecins et des droguistes par la basse classe du peuple ; ceux qui les font ne paraissent avoir aucune idée du caractère criminel de l'acte. On fournit aussi des remèdes en secret sous le nom de *pilules* ou de *gouttes pour les femmes,* et ceux qui les procurent ainsi bien que ceux qui les reçoivent ne semblent pas se douter qu'ils s'exposent à une poursuite criminelle. Dans un cas on m'envoya à examiner une bouteille contenant un liquide qu'on supposait avoir servi dans le but de provoquer l'avortement, et qui était nommé *Essence persane de roses*. C'était une forte teinture éthérée d'ergot de seigle.

Dans un récent procès d'avortement criminel, le témoignage médical a dépassé de beaucoup ces limites ordinaires. Il paraît que les accusés s'étaient adressés à un médecin pour se procurer des drogues pour faire avorter. Le médecin, méconnaissant son devoir dans cette circonstance, en informa la police et prescrivit à son instigation une drogue qui ne pouvait faire aucun mal. Les accusés furent ainsi conduits à commettre un crime, et aux débats le médecin se présenta sous le double rôle de dénonciateur et d'expert, circonstance qui donna lieu à quelques observations sévères de la part du juge. Quand un médecin est en butte à une pareille demande, il n'y a pas d'objection à ce qu'il la fasse connaître à la police ou aux autorités judiciaires, mais il ne doit pas aller au delà. Il doit refuser de donner des drogues à ceux qui lui en demandent et ne se prêter en aucune manière à une dénonciation dans le but d'une poursuite. Cet acte était fait sans doute dans l'intention excellente de protéger le public, mais avec une idée erronée du devoir professionnel.

A.-S. TAYLOR.

MATHÉMATIQUES

Étude sur le jeu de baccarat.

Nous nous proposons d'appliquer au jeu de baccarat les principes généraux énoncés dans une étude que nous avons précédemment faite des jeux de hasard. (Voir le n° du 29 janvier 1881.)

Nous rappellerons d'abord aussi brièvement que possible les règles du baccarat.

Règle du jeu. — Le *baccarat* se joue avec plusieurs jeux de 52 cartes. Le *banquier* donne deux cartes au *ponte* et en prend deux pour lui-même. On additionne les points en comptant les as pour 1 et les figures pour 0; quand le total atteint ou dépasse 10, on ne tient pas compte des dizaines. C'est le point le plus élevé qui gagne. Le banquier *abat* s'il a 8 ou 9 et dans le cas contraire il offre des cartes. Le ponte abat s'il a 8 ou 9.

Si le banquier a offert des cartes, le ponte qui n'a pas abattu a le droit de demander une troisième carte ou de s'y tenir ; le calcul démontre qu'il a intérêt à prendre une carte toutes les fois qu'il a *baccarat* (c'est-à-dire 0), 1, 2, 3 ou 4, et à s'y tenir toutes les fois qu'il a 6 ou 7. Il est à peu près indifférent de tirer à 5 ou de s'y tenir. Nous reviendrons sur ce point dans la suite, avec beaucoup de détail.

Le banquier a le droit de prendre une carte si le ponte n'a pas abattu. Il en prend une, ou s'y tient, d'après le point qu'il a et d'après celui qu'il suppose au ponte. L'avantage du banquier consiste à connaître la carte qu'il a donnée au ponte et à en conclure s'il convient ou non de tirer.

Le baccarat peut se jouer en *chemin de fer* ou *en banque*. Dans le chemin de fer, chaque joueur est successivement banquier ; le banquier, qui prend la main, met en jeu une mise quelconque, que les autres joueurs couvrent en général intégralement. Chaque fois qu'il gagne, cette somme se double, et le banquier continue à tenir les cartes, sans pouvoir rien retirer de ce qui se trouve au banco, à moins que ses adversaires eux-mêmes ne tiennent pas toute la somme ; c'est d'ailleurs ce qui arrive quand le banquier *passe* (c'est-à-dire gagne) un certain nombre de fois consécutives. D'ailleurs, le banquier est libre de *passer la main* quand il veut et un autre joueur peut alors la prendre, à la condition de mettre en banque une somme égale à celle qui s'y trouvait.

Dans le baccarat *en banque,* il y a un banquier permanent et tous les autres joueurs sont partagés en deux camps ou *tableaux*. Chacun des deux tableaux reçoit deux cartes, qui sont tenues successivement par les divers pontes du tableau Le banquier abat ou offre des cartes ; le tableau de droite abat, s'y tient ou demande une carte ; le tableau de gauche abat, s'y tient ou demande une carte. Le banquier a le droit de prendre une carte, à moins que les deux tableaux n'aient abattu ; il prend une détermination après avoir consulté son point, en tenant compte des enjeux respectifs des deux tableaux et des cartes qui ont été données.

Dans tous les cas, le ponte qui a abattu gagne, quand même le banquier amène en tirant un point égal ou supérieur au sien, ce qui revient à dire que 8 d'abatage vaut mieux que 9 de tirage.

L'étude mathématique du baccarat a été faite en 1872 par M. Dormoy, ingénieur des mines, qui a publié à ce sujet un fort intéressant travail dans le *Journal des actuaires*. Nous avons refait et complété les calculs de M. Dormoy et nous nous sommes trouvé généralement d'accord avec lui, sauf en ce qui concerne la question du tirage à 5, et la situation respective du banquier et des pontes du petit tableau.

I. — ÉTUDE D'UN COUP ISOLÉ.

Principes généraux. — Nous admettrons que le nombre des cartes est assez grand pour que les joueurs ne puissent pas déduire de l'examen des cartes passées des indices sur celles qui restent au talon.

Dans ce cas, la probabilité d'amener une figure ou un dix est de $\frac{4}{13}$ et la probabilité d'amener chacune des 9 autres espèces de cartes est $\frac{1}{13}$ (1).

Si deux cartes sont prises au hasard, la probabilité du point de *baccarat*, c'est-à-dire 0, est de $\frac{25}{169}$, et la probabilité de chacun des 9 autres points est de $\frac{16}{169}$.

Si le point est égal ou inférieur à 4, il y a plus de chances de l'augmenter que de le diminuer, en tirant une troisième carte.

Si nous admettons, comme c'est le cas le plus habituel, que le joueur règle sa conduite d'après ce principe, les probabilités des divers points définitifs sont les suivantes :

9 (abatage)	208	: 2197
8 (abatage)	208	
0	164	
1	137	
2	137	
3	137	
4	137	
5	297	
6	297	
7	297	
8	89	
9	89	

Baccarat simple. — La probabilité pour que le banquier abatte est de $\frac{32}{169}$. La probabilité pour que le ponte abatte est également de $\frac{32}{169}$. La probabilité pour que tous deux abattent est de $\frac{1024}{28561}$ et la probabilité pour qu'aucun des joueurs n'abatte est de $\frac{18769}{28561}$.

Si le ponte s'y tient, il a 5, 6 ou 7 et s'il demande une carte il a 0, 1, 2, 3, 4 ou 5.

Souvent le banquier est renseigné plus complètement sur le point du ponte. Il sait généralement quels sont les pontes qui ont l'habitude de tirer à 5, et quels sont ceux qui ont l'habitude de s'y tenir.

Les cartes qui constituent le point de baccarat ressemblent en général beaucoup à celles qui constituent le point de 9, et les cartes qui constituent le point de 7 ressemblent toujours à celles qui constituent le point de 8. Il est peu de joueurs novices qui puissent se défendre, quand ils ont 7 au baccarat, d'un geste involontaire, plus ou moins perceptible à l'œil exercé du banquier. Comme le ponte prend des cartes avec 0 et s'y tient avec 7, le banquier est alors renseigné sans ambiguïté.

Les joueurs novices qui ont 5 se laissent aussi quelquefois trahir par leur hésitation même.

Il se trouve enfin des joueurs qui renseignent le banquier d'une façon certaine en abattant par erreur.

En appliquant à cette question le théorème de la probabilité des causes, on obtient les résultats suivants pour la probabilité du point du ponte.

		5	6	7
Le ponte qui s'y tient a.	l'habitude de se tenir à 5.	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
	l'habitude de tirer à 5.	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
	très fortement tiqué	0	0	1

		0	1	2	:	4	5
Le ponte qui tire une carte a . .	l'habitude de se tenir à 5.	$\frac{25}{89}$	$\frac{16}{89}$	$\frac{16}{89}$	$\frac{16}{89}$	$\frac{16}{89}$	0
	l'habitude de tirer à 5.	$\frac{5}{21}$	$\frac{16}{105}$	$\frac{16}{105}$	$\frac{16}{105}$	$\frac{16}{105}$	$\frac{16}{105}$
	très fortement tiqué	1	0	0	0	0	0

Quelquefois le banquier obtient l'autorisation de retourner une des cartes du jeu du ponte, à la condition de retourner aussi une carte de son jeu. En raison de la prédominance des cartes non marquantes ou *bûches,* il est probable que le point du ponte est égal à celui de la carte retournée.

Le ponte a l'habitude de se tenir à 5, et n'a pas tiqué en recevant sa seconde carte.

		5	6	7
Il s'y tient et sa première carte est. .	inférieure à 5	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
	5	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
	6	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$
	7	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$
	8 ou 9	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

		0	1	2	3	4
Il tire et sa première carte est.	0	$\frac{25}{41}$	$\frac{4}{41}$	$\frac{4}{41}$	$\frac{4}{41}$	$\frac{4}{41}$
	1	$\frac{25}{137}$	$\frac{64}{137}$	$\frac{16}{137}$	$\frac{16}{137}$	$\frac{16}{137}$
	2	$\frac{25}{137}$	$\frac{16}{137}$	$\frac{64}{137}$	$\frac{16}{137}$	$\frac{16}{137}$
	3	$\frac{25}{137}$	$\frac{16}{137}$	$\frac{16}{137}$	$\frac{64}{137}$	$\frac{16}{137}$
	4	$\frac{25}{137}$	$\frac{16}{137}$	$\frac{16}{137}$	$\frac{16}{137}$	$\frac{64}{137}$
	supérieure à 4	$\frac{25}{89}$	$\frac{16}{89}$	$\frac{16}{89}$	$\frac{16}{89}$	$\frac{16}{89}$

(1) Il est facile de voir que, si l'on prend n cartes au hasard, le point moyen sera

$$\frac{9}{2}\left[1-\left(\frac{3}{13}\right)^n\right]$$

Ce point, d'autant plus élevé que n est plus grand, est égal à

0,00 pour $n = 0$
3,46 — $n = 1$
4,26 — $n = 2$
4,42 — $n = 3$
4,50 — $n = \infty$

On peut faire un calcul analogue pour le cas d'un ponte qui a l'habitude de tirer à 5.

Quand le ponte prend une troisième carte, si cette carte est égale ou supérieure à 5, elle peut *améliorer* ou *réduire* son point. Les joueurs novices renseignent souvent le banquier à cet égard par un jeu de physionomie involontaire.

Pour fixer les idées, nous allons supposer : 1° que le ponte se tient à 5 et que le banquier le sait ; 2° que le ponte n'accorde jamais au banquier l'autorisation de retourner une carte de son jeu ; 3° que le visage du ponte reste absolument impassible en regardant ses cartes, et en recevant la troisième.

Supposons d'abord qu'il n'y ait pas d'abatage.

Nous avons à distinguer deux cas, suivant que le banquier s'y tient ou tire une carte, et ce dernier cas se subdivise en 10 suivant la nature de la carte tirée. Si le banquier n'a pas abattu, on ne peut faire que 8 hypothèses sur la nature de son point. Nous avons donc en tout 88 cas à examiner.

Il est facile de calculer, pour chacun de ces cas, quelles probabilités a le banquier de gagner ou d'être en cartes, soit qu'il s'y tienne, soit qu'il tire une carte.

On obtient les *chances* du banquier en ajoutant la probabilité qu'il a de gagner avec la moitié de la probabilité pour qu'il ait le même point que le ponte. Le banquier doit tirer ou s'y tenir suivant qu'il augmente ou qu'il diminue ses chances en tirant. Le tableau suivant fait connaître, sous forme de fractions ayant 2314 pour dénominateur commun, la quantité dont le banquier augmente ou diminue ses chances en tirant.

POINT du BANQUIER.	LE PONTE A PRIS UN										LE PONTE S'Y EST TENU.
	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	
0.	+ 1071	+ 1193	+ 1015	+ 837	+ 659	+ 481	+ 463	+ 605	+ 747	+ 889	+ 623
1.	+ 711	+ 943	+ 1015	+ 837	+ 659	+ 481	+ 303	+ 265	+ 423	+ 565	+ 623
2.	+ 391	+ 543	+ 765	+ 837	+ 659	+ 481	+ 303	+ 125	+ 107	+ 249	+ 623
3.	+ 71	+ 213	+ 355	+ 587	+ 659	+ 481	+ 303	+ 125	— 53	— 71	+ 623
4.	— 249	— 107	+ 35	+ 177	+ 409	+ 481	+ 303	+ 152	— 53	— 231	+ 623
5.	— 409	— 427	— 285	— 143	— 1	+ 231	+ 303	+ 125	— 53	— 231	+ 326 1/3
6.	— 409	— 587	— 605	— 463	— 321	— 179	+ 53	+ 125	— 53	— 231	— 267
7.	— 409	— 587	— 765	— 757	— 641	— 499	— 357	— 125	— 53	— 231	— 801

Il en résulte pour le banquier les règles suivantes :

1° Toujours tirer à baccarat, un ou deux;

2° Toujours se tenir à sept;

3° Devant un ponte qui s'y tient, tirer à 3, à 4 ou à 5 et se tenir à 6;

4° Devant un ponte qui a pris une carte, tirer toujours à 3 sauf si l'on a donné 8 ou 9 ; tirer toujours à 4, sauf si l'on a donné 8, 9, 0 ou 1 ; ne tirer à 5 que si l'on a donné 5, 6 ou 7; ne tirer à 6 que si l'on a donné 6 ou 7.

Le banquier doit donc tirer dans 55 cas et s'y tenir dans 33 cas.

Si nous admettons que le banquier et le ponte jouent tous deux correctement, il est facile de calculer dans chaque cas, au moyen du théorème des probabilités composées, quelles sont les probabilités pour le banquier, et en réunissant ces probabilités partielles, on obtient les résultats suivants :

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Gain} \ldots\ldots\ldots\ldots & 1\,442\,664 \\ \text{Égalité} \ldots\ldots\ldots\ldots & 360\,809 \\ \text{Perte} \ldots\ldots\ldots\ldots & 1\,368\,488\end{array}\right\} : 3\,171\,961$$

Pour tenir compte des cas d'abatage, il faut multiplier les probabilités ci-dessus par $\frac{18769}{28561}$ et ajouter aux résultats obtenus les nombres suivants :

$$\text{Gain} \ldots\ldots \quad \frac{16}{169}\cdot\frac{153}{169} + \frac{16}{169}\cdot\frac{137}{169} = \frac{16.290}{169^2}$$

$$\text{Égalité} \ldots\ldots \quad \frac{16}{169}\cdot\frac{16}{169} + \frac{16}{169}\cdot\frac{16}{169} = \frac{16.32}{169^2}$$

$$\text{Perte} \ldots\ldots \quad \frac{16}{169}\cdot\frac{16}{169} + \frac{137}{169}\cdot\frac{32}{169} = \frac{16.290}{169^2}$$

On obtient ainsi les résultats suivants :

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Gain} \ldots\ldots\ldots\ldots & 2\,226\,824 \\ \text{Égalité} \ldots\ldots\ldots\ldots & 447\,337 \\ \text{Perte} \ldots\ldots\ldots\ldots & 2\,152\,648\end{array}\right\} : 4\,826\,809$$

ou approximativement :

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Gain} \ldots\ldots\ldots\ldots & 461 \\ \text{Égalité} \ldots\ldots\ldots\ldots & 93 \\ \text{Perte} \ldots\ldots\ldots\ldots & 446\end{array}\right\} : 1000$$

L'*avantage* du banquier, c'est-à-dire l'excès de ses chances de gain sur ses chances de perte, est donc environ $\frac{15}{1000}$ ou plus exactement $\frac{1}{65}$.

Cet avantage résulte du fait de tirer à 5, quand le ponte s'y est tenu ; de se tenir à 3 ou à 4, quand le ponte a tiré de mauvaises cartes, et de tirer à 5 ou à 6, quand le ponte a tiré de bonnes cartes. On peut appliquer à cette question le théorème de probabilités composées, de la manière suivante :

1. 1er ÉVÉNEMENT. Point du banquier.	2. PROBABILITÉ. $\frac{16\ A}{13^2}$ A =	3. 2e ÉVÉNEMENT. Carte tirée par le ponte.	4. PROBABILITÉ $\frac{89\ A + 48\ B}{13^3}$ A =	B =	5. CONDUITE du banquier.	6. AUGMENTATION des chances du banquier. $\frac{C}{2.13\ 89}$ C =	7. PRODUIT des colonnes 2, 4 et 6. $\frac{8\ D}{13^6}$ D =
3	1	8	1	0	Le banquier s'y tient.	53	124
		9	1	0	Id.		
4	1	0	4	0	Id.	249	1387
		1	1	0	Id.	107	
		8	1	0	Id.	53	
		9	1	0	Id.	231	
5	1	Refus.	0	13	Le banquier tire.	326 1/3	2288
		5	1	0	Id.	231	659
		6	1	0	Id.	303	
		7	1	0	Id.	125	
6	1	6	1	0	Id.	53	178
		7	1	0	Id.	125	
					TOTAL.		4636

Grâce à la connaissance de la carte donnée au ponte, le banquier améliore donc ses chances de $\frac{8.4636}{13^6} = \frac{37088}{4\,826\,809}$ ou approximativement $\frac{1}{130}$. Les chances du banquier *à priori* sont donc de $\frac{1}{2} + \frac{1}{130} = \frac{33}{65}$, ainsi que nous l'avons trouvé plus haut.

Quand le point initial du banquier est connu, ses chances sont les suivantes :

Baccarat		30	: 100
1		32	
2		34	
3		36	
4		39	
5		43	
6		53	
7		65	
Abatage	8	84	
	9	95	

Les différences qui existent entre ces chances sont moindres qu'on ne le supposerait *à priori*, et cela explique le dicton d'après lequel on gagnerait toujours à baccarat et on perdrait toujours à 7. On gagne une fois sur trois avec baccarat comme point initial et on perd une fois sur trois avec 7. Ces événements surprennent, frappent l'attention et paraissent plus fréquents qu'ils ne sont.

Ce phénomène psychologique se rencontre souvent dans la théorie des probabilités.

Du tirage à 5. — Jusqu'ici nous avons supposé que le ponte se tenait toujours à 5 et que le banquier le savait. Dans le cas où le ponte tire à 5, le banquier, s'il en est informé, doit observer les règles suivantes :

1° Toujours tirer à baccarat, un ou deux ;

2° Toujours se tenir à sept ;

3° Devant un ponte qui s'y tient, tirer à 3, 4, 5 ou 6 ;

4° Devant un ponte qui a pris une carte, tirer toujours à 3, sauf si l'on a donné 8 ; tirer toujours à 4, sauf si l'on a donné 0, 1 ou 8 ; ne tirer à 5 que si l'on a donné 4, 5, 6 ou 7 ; ne tirer à 6 que si l'on a donné 7.

Si le banquier offre des cartes et croit que le ponte se tient au point de 5, les chances du ponte qui a 5 sont les suivantes :

	Gain.	Égalité.	Chances du ponte.
En s'y tenant	$\frac{792}{1781}$	$\frac{153}{1781}$	$\frac{22\,581}{46\,306}$
En tirant	$\frac{10\,352}{23\,153}$	$\frac{2928}{23\,153}$	$\frac{23\,632}{46\,306}$

Si le banquier croit, au contraire, que le ponte tire à 5, les chances du ponte qui a 5 sont les suivantes, toujours dans l'hypothèse où le banquier n'a pas abattu.

	Gain.	Égalité.	Chances du ponte.
En s'y tenant	$\frac{872}{1781}$	$\frac{169}{1781}$	$\frac{24\,869}{46\,306}$
En tirant	$\frac{10\,288}{23\,153}$	$\frac{2800}{23\,153}$	$\frac{23\,376}{46\,306}$

Le ponte doit donc se tenir à 5 en laissant croire le contraire au banquier. Il convient donc de tirer à 5 pour les petits coups et de s'y tenir pour les gros. Il importe avant tout d'agir contrairement aux suppositions du banquier.

Si l'on était tenu de lui faire connaître à l'avance la règle de conduite qu'on se propose de suivre, il vaudrait mieux tirer que de s'y tenir, et on améliorerait ainsi ses chances de $\frac{1}{58}$. C'est en se plaçant à ce point de vue que M. Dormoy avait donné du tirage à 5 une solution diamétralement contraire à la nôtre.

Si le banquier est dans l'incertitude la plus absolue sur les habitudes du ponte, il est à peu près indifférent de tirer ou de se tenir à 5, car les chances du ponte qui a 5, le banquier n'ayant pas abattu, sont de $\frac{23\,725}{46\,306}$ en s'y tenant, et $\frac{23\,504}{46\,306}$ en tirant.

Le principal est de n'avoir pas une règle de conduite constante, et surtout de ne jamais hésiter quand on a 5.

Les joueurs superstitieux, qui croient à la veine, à la déveine et à l'influence des fétiches, voient dans le tirage à 5 un moyen de réagir contre la mauvaise fortune : aussi tirent-ils à 5 quand ils sont en perte, et s'y tiennent-ils quand ils sont en gain. Les Espagnols, qui ont hérité en partie de la nonchalance et des idées fatalistes des Arabes, se tiennent à 5 et même à 4. Les hommes du Nord tirent généralement à 5 et toujours à 4.

Le ponte qui a 5 et qui agit contrairement à ce que suppose le banquier augmente dans tous les cas ses chances de 2 ou 3 pour 100.

La probabilité pour que le ponte ait 5, le banquier n'abattant pas, est $\frac{132}{169} \cdot \frac{16}{169}$. Si le ponte trompe le banquier une fois sur deux, les chances du banquier sont diminuées d'environ

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2,5}{100}\cdot\frac{132}{169}\cdot\frac{16}{169}\text{, ou environ } 0,1 \text{ pour } 100.$$

L'avantage du banquier se trouve ainsi réduit de 1,5 pour 100 à 1,3 pour 100.

Les chances du banquier et du ponte sont donc respectivement de 50,65 pour 100 et de 49,35 pour 100, en admettant que le jeu soit parfaitement correct de part et d'autre.

Baccarat à deux tableaux. — Dans le baccarat à deux tableaux, le banquier doit tenir compte des deux tableaux, à moins que l'un d'eux n'ait abattu.

Si aucun tableau n'a abattu, le banquier qui a 3, 4, 5 ou 6 peut se trouver dans l'embarras, car il se peut que les règles de conduite imposées par les deux tableaux soient différentes.

Le banquier devrait alors comparer la quantité dont il augmente ses chances par rapport au premier tableau, et celle dont il les diminue par rapport au second, après avoir multiplié ces nombres par les enjeux respectifs. Mais ce calcul serait trop long, et, dans la pratique, le banquier néglige complètement le petit tableau.

Si le gros tableau abat, ce dont la probabilité est $\frac{32}{169}$, la question se trouve ramenée à celle du baccarat à un seul tableau.

Supposons maintenant que le gros tableau n'abatte pas, ce dont la probabilité est $\frac{137}{169}$.

Si le banquier offre des cartes, la probabilité pour qu'il en prenne lui-même est la suivante :

Point du banquier.	Probabilité pour qu'il tire.
0	1
1	1
1	1
3	$\frac{89}{137}\cdot\frac{11}{13}+\frac{48}{137}$
4	$\frac{89}{137}\cdot\frac{6}{13}+\frac{48}{137}$
5	$\frac{89}{137}\cdot\frac{3}{13}+\frac{48}{137}$
6	$\frac{89}{137}\cdot\frac{2}{13}$
7	0

D'après cela, les probabilités des divers points définitifs du banquiers sont les suivants :

9 abatage	370 448	: 3 912 857
8 abatage	370 448	
0	296 372	
1	248 285	
2	248 285	
3	276 765	
4	347 965	
5	390 685	
6	504 765	
7	533 245	
8	162 797	
9	162 797	

Le petit tableau tire sans s'inquiéter du gros tableau ni du banquier, et les probabilités des points définitifs du ponte sont celles qui ont été données plus haut.

Il en résulte que le banquier a les probabilités suivantes de gagner et de perdre sur le petit tableau.

Gain	3 853 654 120	: 8 596 546 829
Égalité	809 629 757	
Perte	3 933 262 952	

En tenant compte des cas où le gros tableau abat, les probabilités pour le banquier à l'égard du petit tableau sont en définitive les suivantes :

Gain	4 780 012 904	: 10 604 499 373
Égalité	995 721 949	
Perte	4 828 764 520	

ou approximativement :

Gain	451	: 1000
Égalité	94	
Perte	455	

Le désavantage du banquier est de $\frac{4}{1000}$, ou plus exactement $\frac{1}{217}$.

Le banquier doit forcément tenir compte des deux tableaux quand ils sont égaux, par exemple dans le cas où l'un des joueurs fait le banco à cheval.

Le banquier a environ 45,5 pour 100 de chances pour gagner chaque tableau et 9,5 pour 100 de chances pour être en cartes.

La probabilité pour qu'il soit en cartes avec les deux tableaux est $\left(\frac{9,5}{100}\right)^1$ ou environ 0,9 pour 100.

La probabilité pour qu'il soit en cartes avec un tableau en gagnant l'autre est environ $2.\frac{9,5}{100}\cdot\frac{45,5}{100}$, soit 8,6 pour 100.

La probabilité pour qu'il soit en cartes avec un tableau en perdant l'autre est environ $2.\frac{9,5}{100}\cdot\frac{45}{100}$, soit 8,5 pour 100.

Si les trois tableaux sont inégaux, ils peuvent se classer à peu près indifféremment de six manières. Dans deux d'entre elles, le banquier gagne tout; dans deux autres, il ne perd ni ne gagne, et dans les deux dernières, il perd tout. Ces trois hypothèses ont donc chacune une probabilité égale environ à

$$\frac{100-(0,9+8,6+8,5)}{300}=\frac{27,3}{100}.$$

Pour tenir compte de l'avantage du banquier, on peut admettre pour les probabilités respectives de ces trois hypothèses 27,8 pour 100, 27,3 pour 100 et 26,9 pour 100 (1).

(1) Il faudrait bien se garder de croire que le banquier ayant une probabilité 0,455 de gagner chacun des deux tableaux a une probabilité $(0,455)^2 = 0,207$ de gagner les deux, car, s'il a gagné un des tableaux, cela tend à prouver qu'il a beau jeu, et cela augmente ses

On obtient ainsi le résultat approximatif suivant :

Le banquier gagne des deux côtés. . .		278	: 1000
Le banquier gagne un des tableaux. .		86	
Les trois tableaux sont en cartes.	9	282	
Un tableau paye l'autre.	273		
Le banquier perd un des tableaux. . .		85	
Le banquier perd les deux tableaux. .		269	

Nous allons calculer rigoureusement l'avantage du banquier qui, d'après le tableau ci-dessus, serait de 0,95 pour 100.

Supposons d'abord qu'il y ait au moins un abatage; ce cas se subdivise en cinq autres.

CAS.	PROBABILITÉS.	PROBABILITÉS POUR LE BANQUIER				
		De gagner		D'être en cartes.	De perdre	
		Tout.	Moitié.		Moitié.	Tout.
Les 3 tableaux abattent . .	$\frac{32^3}{169^3}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
Les 2 tableaux abattent . .	$\frac{32^2.137}{169^3}$	0	0	0	0	1
Le banquier et un tableau abattent.	$\frac{2.32^2.137}{169^3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0
Le banquier abat seul . . .	$\frac{32.137^2}{169^3}$	1	0	0	0	0
Un des tableaux abat seul.	$\frac{2.32.137^2}{169^3}$	0	0	$\frac{1\,442\,661}{3\,171\,964}$	$\frac{360\,809}{3\,171\,961}$	$\frac{1\,368\,488}{3\,171\,961}$

L'avantage du banquier, correspondant à ces cinq cas, est égal à

$$\frac{32\,.\,137^2\,.\,74\,176}{169^3\,.\,3171\,961} = \frac{325\,187\,584}{13^{10}}$$

ou approximativement $\frac{1}{424}$ de l'ensemble des deux tableaux.

Considérons maintenant le cas où il n'y a aucun abatage, ce dont la probabilité est $\left(\frac{137}{169}\right)^3$.

Le banquier voit les cartes qu'il donne aux deux tableaux et se trouve amené, dans certains cas, à tirer à 5 ou à 6, ou bien à se tenir à 3 ou à 4.

Un tableau qui n'abat pas s'y tient ou prend une carte, et cette carte peut avoir 10 valeurs différentes. Il y a donc 121 à considérer pour chaque point du banquier. Le banquier s'y tient dans 4 cas avec le point de 3 et dans 32 cas avec le point de 4; il tire dans 46 cas avec 5 et dans 6 cas avec 6. On trouve, par un calcul analogue à celui exposé cinq colonnes plus haut, que le banquier améliore ainsi ses chances de

$$\frac{16\,(208\,.\,14\,528 + 89\,.\,15\,732)}{13^3\,.\,137^3} = \frac{70\,751\,552}{1781^3}$$

ou environ $\frac{1}{79}$ par rapport à un tableau, ou $\frac{158}{1}$ de l'ensemble des deux tableaux; il en résulte pour lui un avantage égal à $2\,.\,\frac{1}{158}\,.\,\left(\frac{137}{169}\right)^3$ ou environ $\frac{1}{151}$ de l'ensemble des deux tableaux.

chances de gagner l'autre. Si le banquier a gagné le tableau de droite, la probabilité pour qu'il gagne celui de gauche est $\frac{0,278}{0,455} = 0,611$ au lieu de 0, 455.

L'avantage du banquier est en définitive égal à

$$\frac{325\,187\,584}{13^{10}} + \left(\frac{137}{169}\right)^3 \frac{70\,751\,552}{13^3\,137^3} = \frac{1\,244\,957\,760}{137\,858\,491\,849}$$

ou environ $\frac{1}{111}$ ou 0,90 pour 100.

Si le banquier s'occupait exclusivement de l'un des tableaux, de celui de droite par exemple, son avantage serait réduit à

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{65} - \frac{1}{217}\right) = \frac{1}{185}.$$

En résumé, en admettant que les pontes se tiennent toujours à 5, et *que le banquier en soit informé*, le banquier a un avantage $\frac{1}{65} = 0,0153$ sur le gros tableau et un désavantage $\frac{1}{217} = 0,0046$ sur le petit tableau; sur les sommes mises à cheval, il a un avantage $\frac{1}{185} = 0,0054$ si les tableaux sont très inégaux, et un avantage $\frac{1}{111} = 0,0090$ si les tableaux sont égaux.

On peut admettre que le banquier a en moyenne un avantage égal à 0,0080 sur l'ensemble des deux tableaux.

Il faut en retrancher environ 0,0020, pour tenir compte de l'état d'indécision du banquier relativement au tirage des pontes à 5 et on obtient ainsi 0,0060 environ.

Les chances des banquiers et des pontes sont donc respectivement de 50,3 pour 100 et de 49,7 pour 100 en admettant que le jeu soit parfaitement correct de part et d'autre.

II. — ÉTUDE DU JEU SUIVI.

Chemin de fer. — Nous avons vu que, pour chaque coup, l'avantage du banquier était de 1,3 pour 100 si le ponte jouait bien.

Si le ponte tique (à 0 ou à 7), s'il hésite à 5, s'il se laisse trahir par son émotion en recevant une troisième carte supérieure à 4, les chances du banquier sont augmentées notablement. Elles peuvent ainsi s'augmenter de 10 pour 100 une fois sur 20, c'est-à-dire de 0,5 pour 100. L'avantage du banquier s'accroît donc de 1 pour 100.

Le banquier qui fait, en donnant, une erreur quelconque paye le coup. Si l'on admet que cela lui arrive une fois sur 300 coups, cela diminue ses chances de $\frac{1}{2}\,\frac{1}{300}$ et, par conséquent, son avantage de $\frac{1}{300}$ ou 0,3 pour 100.

Dans la pratique on peut admettre que le banquier a un avantage égal à 2 pour 100 (1). Il a une probabilité 0,46 de gagner le premier coup et 0,44 de le perdre.

(1) Si le ponte jouait sans regarder ses cartes, l'avantage du banquier s'élèverait à 22 pour 100.

Il y a une probabilité 0,46 pour que le second coup soit donné avec un enjeu double et une probabilité 0,10 pour qu'il soit donné avec un enjeu égal. Il en résulte pour le banquier un avantage égal à $0,02\,(0,46\,.\,2+0,10)=0,0204$ de l'enjeu primitif. Le deuxième coup représente donc pour le banquier le même avantage que le premier. Mais, si la somme mise en banque était égale au maximum que les pontes ne dépassent pas, le second coup ne représenterait qu'un avantage égal à $0,02\,.\,0,56$.

Si les pontes laissent leurs enjeux constants, la main vaut

$$0,02\,(1+0,56+0,56^2+\ldots.)=\frac{0,02}{0,44}$$

Soit A le maximum que les pontes ne dépassent pas, et soit a la somme mise en banque.

L'avantage du banquier est donné par la formule approximative

$$\left(0,045+0,076\log\frac{A}{a}\right)a \qquad (1):$$

Cet avantage, nul pour $a=0$, devient égal à 0,045 A pour $a=A$. La formule n'est pas applicable au delà. L'avantage du banquier est d'autant plus considérable en *valeur absolue* que sa mise initiale est plus élevée. Au contraire, cet avantage, *rapporté à la somme mise en banque,* est d'autant plus faible que cette mise est plus élevée. L'avantage proportionnel, infini pour $a=0$, est égal à 0,045 pour $a=A$.

C'est toujours une faute de passer la main au point de vue de l'espérance mathématique, mais il n'en est pas de même au point de vue de l'espérance morale. Nous avons vu que dans un jeu équitable il y avait un désavantage pour les deux joueurs et que ce désavantage était d'autant plus grand que l'enjeu était plus grand par rapport à la fortune des joueurs. Quand on poursuit sa main au chemin de fer, il arrive un moment où le désavantage moral, qui résulte de l'élévation de l'enjeu, compense l'avantage mathématique corrélatif du droit de tenir les cartes.

Ce moment *psychologique,* où il convient de passer la main, dépend de l'enjeu maximum que les pontes ne dépassent généralement pas, des sommes dont disposent le banquier et les pontes, de la somme qui a été primitivement mise en banque et de la durée probable de la partie.

Un joueur qui pense avoir 40 ou 50 fois la main dans le courant de la soirée est en droit d'espérer qu'une de ses mains passera au moins 5 fois. Il peut même poursuivre encore davantage si le banco n'est pas fait complètement.

Banque. — Nous avons vu qu'à la banque, le banquier avait l'avantage par rapport au gros tableau et le désavantage par rapport au petit tableau. Les pontes doivent donc de préférence jouer sur le petit tableau, et, s'ils veulent jouer de grosses sommes, ils doivent les mettre à cheval, de façon à profiter au moins partiellement des avantages du petit tableau.

L'avantage du banquier par rapport aux pontes est de 0,6 pour 100, si ceux-ci jouent bien.

Il arrive parfois que plusieurs pontes de chaque tableau regardent les cartes tenues par l'un d'eux; le banquier a dans ce cas d'autant plus de chances d'être renseigné sur le point des pontes. D'autre part, il a aussi plus de chances de commettre une erreur en donnant les cartes à la banque qu'au chemin de fer.

En définitive, nous admettrons que l'avantage du banquier est d'environ 1 pour 100.

Nous avons vu qu'il y avait 28,2 pour 100 de chances pour que le coup fût nul, 17,1 pour 100 pour que le coup fût de moitié et 54,7 pour 100 pour que le coup fût complet.

100 coups à la banque équivalent donc environ à 63 coups complets. Si le banquier n'avait pas d'avantage, on pourrait donc parier 1 contre 1 qu'après n coups l'excès du nombre des coups gagnés sur les coups perdus est inférieur à

$$2\,.\,0,337\sqrt{0,633\,n}=0,536\sqrt{n}.$$

En tenant compte de l'avantage du banquier, on arrive à ce résultat que, si les pontes font une mise constante $\frac{A}{2}$ sur chaque tableau, on peut parier un contre un qu'après n coups le gain du banquier sera compris entre les limites

$$\frac{A}{100}\left(n\pm 54\sqrt{n}\right)$$

Dans les conditions habituelles, le banquier peut équitablement payer à la cagnotte 5 pour 100 des sommes mises en banque. (Voir l'*Étude sur les jeux de hasard, Revue scientifique,* 29 janvier 1881.)

Il y a toujours un avantage mathématique à prendre la banque et un désavantage à la lever. Mais, de leur côté, les pontes cessent de jouer dès qu'ils ont gagné une certaine somme, ou dès qu'ils se sont rattrapés, s'ils ont commencé par

---

(1) En effet, posons

$$A=a.2^x.$$

Soit n le nombre des coups qui seront tenus intégralement. On a, en négligeant les coups d'égalité

$$2^n a > A > 2^{n-1} a$$
$$n > x > n-1.$$

n est la partie entière de $x+1$. Ce nombre est, dans la pratique, assez voisin de 5. Il faut, pour tenir compte des cas d'égalité, l'augmenter du dixième de sa valeur. On a donc approximativement

$$n=x+1.$$

Les n premiers coups sont tenus intégralement et valent

$$n.0,02\,a.$$

Les coups suivants, pour lesquels il n'est tenu que A, valent

$$0,56^n\,\frac{0,02}{0,44}\,A=0,025\,(1,12)^x\,a$$

ou sensiblement

$$(0,025+0,003\,x)\,a.$$

La main totale vaut donc

$$(0,045+0,023\,x)\,a$$

ou en remplaçant x par sa valeur

$$\left(0,045+0,023\,\frac{\log\frac{A}{a}}{\log 2}\right)a.$$

perdre. Il en résulte que le banquier doit profiter d'un moment où il gagne pour lever la banque. Ce moment psychologique dépend principalement des sommes dont disposent le banquier et les pontes, et l'habileté au jeu de baccarat consiste à savoir lever les banques au bon moment.

L'avantage du banquier étant de tenir la banque, l'intérêt des pontes est d'essayer de la faire sauter en un coup plutôt que d'essayer de l'user à la longue.

On peut se demander s'il vaut mieux faire le banco à cheval ou sur un seul tableau. Pour résoudre cette question, nous supposerons que le ponte se tient toujours à 5 et que le banquier en est informé; nous admettrons que le ponte ne tique jamais et que le banquier ne se trompe jamais. Ces hypothèses modifient dans les deux cas à peu près de la même manière l'avantage du banquier.

Si le banco ne réussit pas complètement au ponte, celui-ci peut poursuivre. Nous admettrons que la probabilité pour que le banco soit continué est égale à 9, 7, 5 ou 3 dixièmes, suivant que le ponte a gagné la moitié du banco, n'a rien gagné ou bien a perdu la moitié ou la totalité du banco. Ces chiffres n'ont d'ailleurs rien d'absolu. Soit x l'avantage du banquier quand on lui fait le banco sur un tableau. Il y a une probabilité 0,3. 0,461 = 0,1383 pour que le banco soit refait avec une valeur double et une probabilité 0,7 . 0,093 = 0,0651 pour qu'il soit refait avec une valeur égale. On a donc

$$x = \frac{1}{65} + 0{,}1383 \cdot 2x + 0{,}0651\, x$$

d'où l'on tire $x = \frac{1}{43}$.

Dans le cas du banco à cheval il y a une probabilité 0,3 . 0,278 = 0,0834 pour que le banco soit refait avec une valeur double, une probabilité 0,5 . 0,086 = 0,0430 pour qu'il soit refait avec une valeur sextuple, une probabilité 0,7 . 0,282 = 0,1974 pour qu'il soit refait avec une valeur égale et une probabilité 0,9 , 0,085 = 0,0765 pour qu'il soit refait une valeur dédouble.

On a donc

$$x = \frac{1}{111} + 0{,}0834 \cdot 2x + 0{,}0430\, \frac{3x}{2} + 0{,}1974\, x + 0{,}0765\, \frac{x}{2}$$

d'où l'on tire $x = \frac{1}{59}$.

L'avantage du banquier est donc un peu plus grand avec le banco sur un tableau qu'avec le banco à cheval, mais la différence est de l'ordre des quantités négligées et l'on peut dire que dans l'un comme dans l'autre cas l'avantage du banquier est de $\frac{1}{50}$ ou 2 pour 100.

Il s'élèverait au moins à 3 pour 100 en tenant compte des maladresses que peut commettre le ponte, car un banco est généralement un gros coup pour le ponte, et il y a des chances pour qu'il ne soit pas maître absolu de ses émotions.

Conclusions. — Le baccarat est un jeu de hasard dans lequel le banquier a un avantage incontestable, mais assez faible, si les pontes jouent convenablement.

Au chemin de fer, la règle est de prendre la main le plus souvent possible, et de ne pas faire de gros bancos.

A la banque, le jeu est d'être banquier, ou de s'intéresser pour une part dans la banque.

Si l'on ne peut pas prendre la banque, faute de capitaux suffisants, il faut jouer de préférence sur le petit tableau. Si l'on veut jouer gros jeu comme ponte, il vaut mieux faire un gros banco à cheval que de jouer longtemps contre la banque.

Le banquier doit mettre en banque le moins possible, tout en conservant d'abondantes réserves, de façon à tenir longtemps la banque.

Les pontes les plus habiles sont ceux qui sont le plus complètement maîtres de leurs émotions. Les autres pontes doivent profiter du moment où ces joueurs habiles tiennent les cartes.

Les coups passés n'ont aucune influence sur les coups futurs. Il n'y a aucune loi dans l'ordre de la succession des coups, et les *martingales* les plus compliquées ne changent rien à l'espérance mathématique des joueurs.

Les joueurs qui font indéfiniment *paroli* sont à peu près sûrs de perdre de petites sommes et n'ont qu'une faible espérance d'en gagner de grosses. Les joueurs qui poursuivent indéfiniment leur argent sont à peu près sûrs de gagner de petites sommes, mais ils peuvent en perdre de considérables. A la longue, tout finit par s'équilibrer, sauf l'avantage permanent du banquier. Les joueurs les plus riches peuvent prendre le plus souvent les banques, et il en résulte pour eux un avantage certain.

Si les joueurs jouaient une mise constante, le gain ou la perte probable de chacun d'eux serait proportionnelle à la racine carrée du temps. Les joueurs proportionnent en général leurs enjeux au gain ou à la perte qu'ils ont fait depuis l'origine de la soirée. Il en résulte que les enjeux croissent forcément jusqu'au moment où les joueurs, ayant perdu ce qu'ils voulaient ou pouvaient perdre, sont forcés de modérer leurs enjeux.

Les passions s'émoussent comme les sens, et tous les joueurs finissent fatalement par chercher dans un gros jeu les émotions que ne leur procure plus un jeu modéré.

Le baccarat n'offre pas d'autre intérêt que les émotions du gain et de la perte; l'enjeu se modifie à chaque instant et presque toujours en croissant. Il est extrêmement facile de tricher au baccarat, soit en substituant habilement quelques cartes aux véritables, soit en se faisant renseigner par un complice sur le jeu de l'adversaire..

En résumé, le baccarat est *le plus dangereux de tous les jeux,* et il faut considérer comme un malheur public le développement qu'il a pris depuis quelques années, particulièrement dans les casinos des stations thermales ou maritimes; les salons de jeu de ces établissements sont de véritables tripots ouverts à tout venant et le gouvernement ferait une œuvre essentiellement moralisatrice en les fermant d'une façon absolue.

Badoureau.